Soluții

1.a) $A \cdot A^t = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$.

b) $f(0) = \det\left(A \cdot A^t + 0 \cdot B\right) = \det\left(A \cdot A^t\right) = \det(A) \cdot \det\left(A^t\right) = (\det A)^2 \geq 0$.

c) Fie $f(x) = \begin{vmatrix} a^2+b^2+x & ac+bd+x \\ ac+bd+x & c^2+d^2+x \end{vmatrix} = \left(a^2+b^2+c^2+d^2-2ac-2bd\right)x + (ad-bc)^2$.

Afirmația din enunț este adevărată: $m = a^2+b^2+c^2+d^2-2ac-2bd$, $n = (ad-bc)^2$.

2.a) Pentru $q = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \in G$.

b) Fie $x = \cos q\pi + i\sin q\pi$, $y = \cos r\pi + i\sin r\pi$, $q, r \in \mathbb{Q}$. Atunci $xy = \cos(q+r)\pi + i\sin(q+r)\pi \in G$.

c) Rădăcinile polinomului f sunt numerele complexe $z_k = \cos\frac{2k\pi}{6} + i\sin\frac{2k\pi}{6} = \cos\frac{k\pi}{3} + i\sin\frac{k\pi}{3}$, $k = 0,1,\ldots,5$.

Cum $\frac{k}{3} \in \mathbb{Q}$, pentru orice $k = 0,1,\ldots,5$, rezultă că f are toate rădăcinile în G.